Análisis Matemático II — Segundo parcial (segunda fecha) – — 14-07-2022

Tema 1

Nombre y Apellido: Ludmila Carolina Elbich

Nro de alumno/a: 09457/1

Comisión: 1

Todos los ejercicios deben estar justificados. Si se utiliza algún resultado teórico, deben estar indicadas y comprobadas las hipótesis del mismo.

Tema III

D

M 1. Calcular el volumen comprendido entre el paraboloide $4x = y^2 + z^2$ y el cono $(x+1)^2 = y^2 + z^2$, situado por delante del plano yz.

M 2. Consideremos la curva C dada por la intersección entre el plano $x + y + z = 2$ y el cilindro parabólico $y = x^2$ desde el punto $A = (1, 1, 0)$ hasta el punto $B = (0, 0, 2)$, recorrida en ese orden.

 a) Encontrar una parametrización adecuada para la curva C.

 b) Encontrar el valor adecuado de la constante a para que el trabajo ejercido por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (z, a, 1)$ al mover una partícula a lo largo de la curva C sea igual a 7.

Tema IV

D

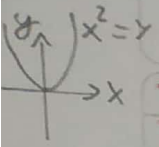
1. *a*) Consideremos el campo de fuerza $\vec{\mathbf{F}}(x, y) = \left(2e^{2x} \operatorname{sen} y, e^{2x} \cos y\right)$ y el punto $P(0, \frac{\pi}{2})$. Hallar un punto Q sobre la recta $y = \frac{\pi}{4}$ de modo que el trabajo ejercido por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ desde el punto P hasta el punto Q sea igual a 2.

M *b*) Sea el campo $\vec{\mathbf{G}}(x, y) = (xy, xg(y))$, con $g \in C^1(\mathbb{R})$ y D el triángulo de vértices (0,1), (2,1) y (0,3). Llamemos γ al segmento que une (0,3) con (2,1) en ese orden.
 Sabiendo que $\int_\gamma \vec{\mathbf{G}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \frac{2}{3}$, calcular $\iint_D g(y)\, dx\, dy$. Justificar todos los pasos realizados.

M 2. Sea S la porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$ que se encuentra en el primer octante y es interior al cilindro $x^2 + y^2 - 4y = 0$. Calcular $\iint_S x\, dS$.

Escaneado con CamScanner

Elbich Ludmila



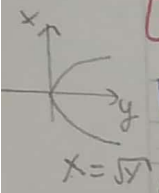
TEMA III

1 Paraboloide $4x = y^2 + z^2$

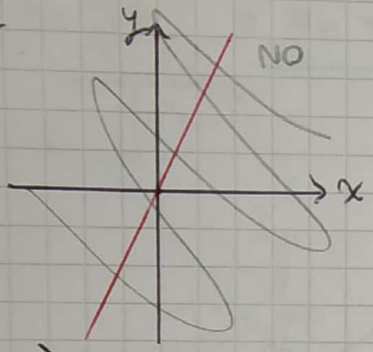
Como $(x+1)^2 = y^2 + z^2$

$x^2 + 2x + 1 = y^2 + z^2$

$Vol(K) = \iiint_V 1 \, dV$ ✓



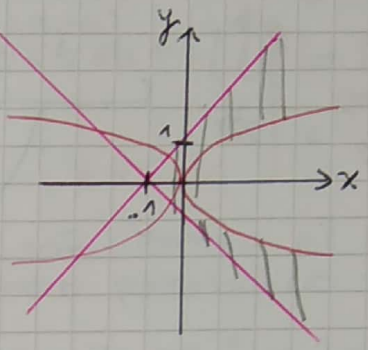
$(z=0)$



$4x = y^2 \rightarrow |y| = 2\sqrt{x}$

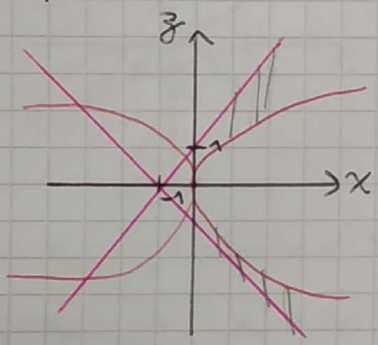
$(x+1)^2 = y^2$

$\rightarrow |y| = x+1$



✓

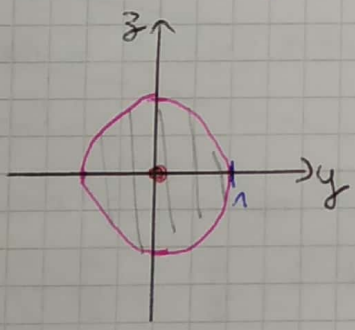
$(y=0)$



$4x = z^2 \longrightarrow |z| = 2\sqrt{x}$

$(x+1)^2 = z^2 \longrightarrow |z| = x+1$ ✓

$(x=0)$



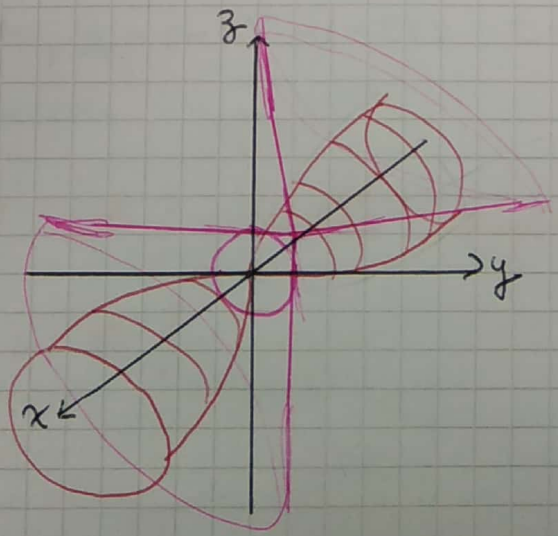
$0 = y^2 + z^2 \rightarrow -y^2 = z^2 \rightarrow$ Punto $(0,0,0)$

$1 = y^2 + z^2 \rightarrow$ Circunferencia

Radio $= 1$ Centro $= (0,0)$

✓

En el espacio



✓

Escaneado con CamScanner

Si proyecto en el plano YZ, obtengo una circunferencia
Utilizo coordenadas polares para parametrizarlo

$$\left.\begin{cases} z = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{matrix} \right] \text{No es el sólido de interés}$$

Llamo al sólido comprendido entre el cilindro y el cono K

$$\text{Vol}(K) = \iiint 1\, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 1\, dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} r\Big|_0^1 d\theta =$$

$$= \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

ojo con esto.

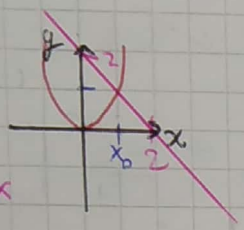
Elbich Ludmila

TEMA III

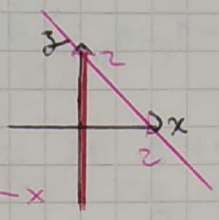
(2) C: Plano $x+y+z=2$
Cilindro Parabólico $y=x^2$

Desde $A=(1,1,0)$ hasta el punto $B=(0,0,2)$ → Recorrido

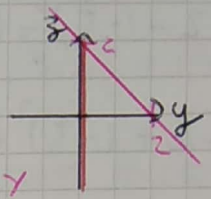
($z=0$) $y=x^2$ $y=2-x$

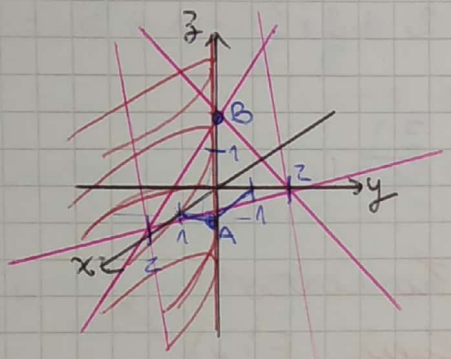


($y=0$) $x^2=0$ $z=2-x$



($x=0$) $y=0$ $z=2-y$





Intersección entre el plano y el cilindro parabólico

$x+x^2+z=2 \rightarrow z=2-x^2-x$
$z=2-x(x+1)$

Curva C

$0 \le x \le x_0$, $2-x \le y \le x^2$, $0 \le z \le 2$] Cartesianas

$x_0^2 = 2-x_0 \rightarrow x_0^2+x_0-2=0 \rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4.1(-2)}}{2.1}$ = $x_0=1$ / $x_0=-2$

~~$\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$~~
$(x, y, 2-x^2-x)$

$x \in [0,1]$
$y \in [2-x, x^2]$
~~$z \in$~~ NO

Busco una parametrización

$\vec{r}(t) = \left(-\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, 2-(t)^2-(\frac{t}{2})\right)$ $t \in [-2,0]$

$\vec{r}(t) = (-t, -t, 2-(-t)^2-(-t))$ $t \in [-1,0]$

Parametrización

¿De dónde sé? falta explicar

¿Va de A a B?

Escaneado con CamScanner

$\vec{F}(x,y,z) = (z, a, 1)$ $\quad a = ?$ para que

$\int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = 7$

$\vec{r}\,'(t) = (-1, -1, 3)$ → mal derivado arrastra error de (a)

$\vec{F}(-t, -t, 2-(-t)^2-(-t)) = (2-(-t)^2-(-t), a, 1)$

$\rightarrow \int_{-1}^{0} (2-(-t)^2-(-t), a, 1)(-1,-1,3)\, dt = 7$ ✓

$$\int_{-1}^{0} -2+(-t)^2+(-t)-a+3\, dt = (-2)t\Big|_{-1}^{0} + \frac{(-t)^3}{3}\Big|_{-1}^{0}$$

$$+\frac{(-t)^2}{2}\Big|_{-1}^{0} - a\,t\Big|_{-1}^{0} + 3\,t\Big|_{-1}^{0} = -2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - a + 3 = \frac{11}{6} - a$$

$$\rightarrow \frac{11}{6} - a = 7 \quad \rightarrow a = \frac{11}{6} - 7 = -\frac{31}{6}$$

Planteo correcto pero arrastra error de (a) y está mal calculado $\vec{F}(\vec{r})$

Escaneado con CamScanner

Elbich

TEMA IV

1) a) $\vec{F}(x,y) = (2e^{2x}\operatorname{Sen}x, e^{2x}\operatorname{Cos}y)$ → Campo

Punto $P\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, Recta $y = \frac{\pi}{4}$

Quiero que $\int_P^Q \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2$ → Punto sobre la recta

$Q = ?$ $\quad Q = (x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{\pi}{4}\right)$ ✓

¿Para qué?

$$P\begin{cases} 2e^{2x}\operatorname{Sen}y = 0 \longrightarrow \operatorname{Sen}y = 0 \longrightarrow y = n\pi \text{ con } n = 0,1,\dots \\ e^{2x}\operatorname{Cos}y = \frac{\pi}{2} \longrightarrow e^{2x} = \frac{\pi}{2} \to 2x\underbrace{\ln(e)}_{1} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$y = n\pi \to \operatorname{Cos}y = 1$ $\qquad x = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$

Usamo $P(x,y) = 2e^{2x}\operatorname{Sen}y$ ✓, con P y Q C^1 porque ¿Donde?
$Q(x,y) = e^{2x}\operatorname{Cos}y$ ✓

son producto entre una Función exponencial y una Trigonométrica. ✓

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} &= 2e^{2x}\operatorname{Cos}y \\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} &= 2e^{2x}\operatorname{Cos}y \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_y(x,y) = Q_x(x,y) \Rightarrow \vec{F} \text{ es conservativo}$$

No es suficiente

Como $\vec{F}$ es conservativo $\Rightarrow \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}(B) - \vec{F}(A)$ ✓

$\to \int_P^Q \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}(Q) - \vec{F}(P) = (2e^{2x_0}\operatorname{Sen}y_0, e^{2x_0}\operatorname{Cos}y_0) -$

$(2,0) = (2e^{2x_0}\operatorname{Sen}y_0 - 2, e^{2x_0}\operatorname{Cos}y_0) = 2$

↓

No puede ser que me quede un vector igualado a un escalar

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

con f / $\vec{F} = \vec{\nabla} f$

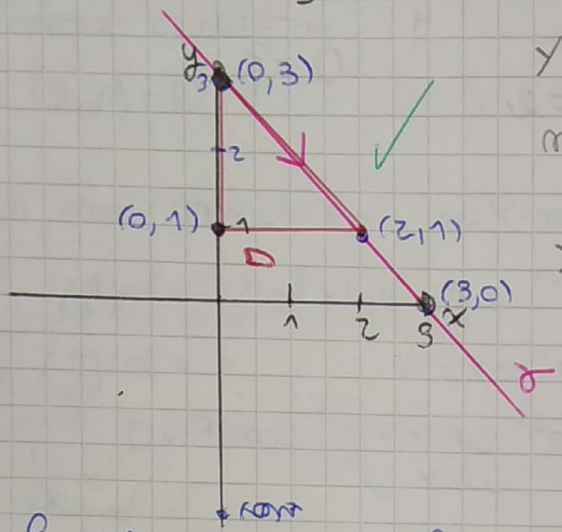
Escaneado con CamScanner

b) Campo $\vec{G}(x,y) = (xy, xg(y))$ con $g \in C^1(\mathbb{R})$

D: triángulo de vértices $(0,1), (2,1)$ y $(0,3)$

γ segmento que une $(0,3)$ con $(2,1)$

Sabiendo $\int_\gamma \vec{G} \cdot d\vec{r} = \frac{2}{3}$ Calcular $\iint_D g(y)\,dx\,dy$



$y = m(x - x_0) + y_0 = -1(x-0)+3$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{2-0} = -1$

$y = -x + 3$

Green pide sentido antihorario ✓

Llamo $P(x,y) = xy$ y $Q(x,y) = x\,g(y)$ ✓

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = x$ ∧ $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = g(y)$ ✓

P y Q son C^1 → ¿dónde? porque P es un polinomio y Q es un producto entre un polinomio y una función que es $C^1(\mathbb{R})$ ✓

Uso el Teorema de Green: $\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$

D es una región simplemente conexa a trozos y no es cerrada

$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\gamma \vec{G} \cdot d\vec{r} = \frac{2}{3}$ ↓ Sabemos

$\to \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy = \frac{2}{3}$ No es correcto.

$$\iint_D (x - g(y))\,dx\,dy = \int_1^3 \int_0^2 (x - g(y))\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - g(y)\,x\Big|_0^2\right) dy =$$

$$= \int_0^3 2 - 2g(y)\,dy = 2y\Big|_0^3 - 2\int_0^3 g(y)\,dy = 6 - 2\int_0^3 g(y)\,dy$$

$\to 6 - 2\int_0^3 g(y)\,dy = \frac{2}{3} \to \int_0^3 g(y)\,dy = \left(6 - \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{8}{3}$

No es lo que queríamos calcular.

Escaneado con CamScanner

Elvicn

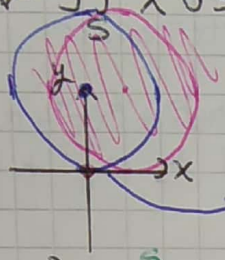
TEMA IV

(2) Cono $z^2 = x^2 + y^2$ (em 1° OCTANTE)

Cilindro $x^2 + y^2 - 4y = 0$

Calcular $\iint x\,dS$

(z=0)

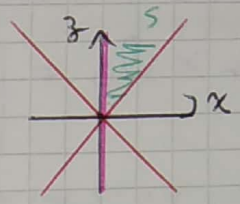


$x^2+y^2=0 \rightarrow$ Ponto $(0,0,0)$

$|x| = \sqrt{4y - y^2}$

$\rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 2^2$

(y=0)



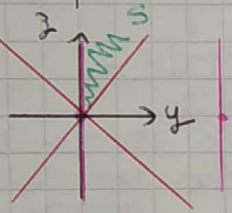
$z^2 = x^2$

$|z| = x$

$x^2 = 0$

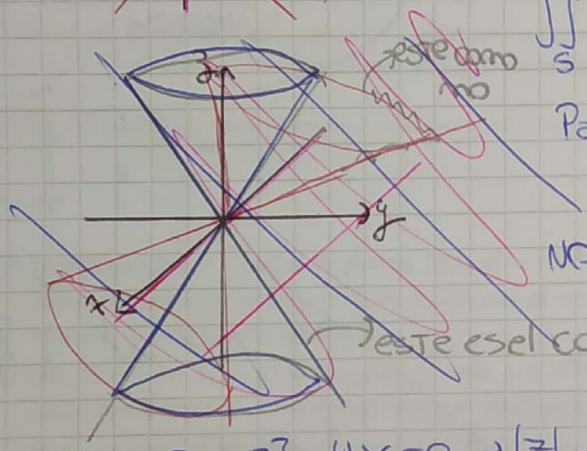
$|x| = 0$

(x=0)



$z^2 = y^2 \rightarrow |z| = y$

$y^2 - 4y = 0 \rightarrow y(y-4) = 0$

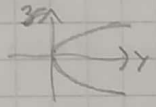


$\iint_S x\,dS =$

Parametrizo la superficie S

NO

Intersección: $z^2 - 4y = 0 \rightarrow |z| = \sqrt{4y}$



$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

$y^2 - 4y + 4 = a^2 - 2ab + b^2 = (y-2)^2$

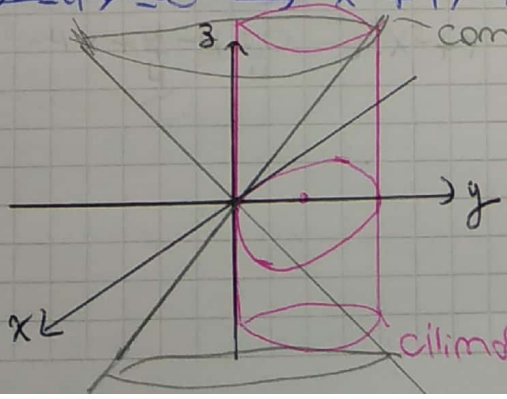
$x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$

$x^2 + (y-2)^2 = 2^2 \rightarrow$ Circunferencia de Radio = 2, Centro = (0, 2)

del cilindro

~~Entonces $x^2 + y^2 - 4y = 0 \rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 0$~~



Escaneado con CamScanner

Parametrizo la superficie S:

Si proyecto en el plano xy, tengo una circunferencia utilizo coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le r \le 4 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{matrix} \qquad |J| = r$$

No es correcta la parametrización

$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ → Parametrización

$$\vec{N} = \Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta\, r & \cos\theta\, r & 0 \end{vmatrix} = (r\cos^2\theta + \sin^2\theta\, r)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + r\vec{k} = (0,0,r)$$

$$\rightarrow \iint_S x\,dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 r\,(r\cos\theta)\,|(0,0,r)|\,dr\,d\theta =$$

Jacobiano — Normal

No puedo tener un producto entre un escalar y un vector

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^4 r^2\cos\theta\,(0,0,r)\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 r\, x \cdot \vec{N}\, dr\, d\theta$$

no el $|\vec{N}|$

Escaneado con CamScanner